

## ВВЕДЕНИЕ

Сетевое планирование и управление (СПУ) представляет собой систему методов, с помощью которых осуществляется планирование и управление разработкой и осуществлением крупных хозяйственных комплексов, научной и технологической подготовкой производства, строительством новых объектов и реконструкцией старых, научными и конструкторскими исследованиями и проектами, организацией и проведением крупных общественных мероприятий и т. п. Диапазон применения СПУ весьма широк: от задач, касающихся деятельности отдельных лиц, до проектов, включающих сотни организаций и десятки тысяч людей, таких как, например, создание крупного территориально-промышленного комплекса.

Впервые методы сетевого планирования были разработаны и применены в США в конце 50-х годов XX века в строительстве: метод *CPM* (метод критического пути) и при разработке ракетной системы «Поларис»: метод *PERT* (метод оценки и обзора программ).

В настоящее время методы сетевого планирования и управления успешно используются:

- для создания календарных планов реализации комплекса работ;
- для управления комплексом работ по принципу «ведущего звена» с прогнозированием и предупреждением возможных срывов в ходе работ;
- для распределения ответственности между руководителями разных уровней и исполнителями работ и повышения эффективности управления в целом;
- для выявления и мобилизации резервов времени, а также трудовых, материальных и денежных ресурсов, и оптимизации сроков исполнения и затрат.

Математической основой методов сетевого планирования и управления является отражение производственного процесса (т. е. последовательности выполняемых работ) в виде так называемого сетевого графика, который представляет собой специфический частный вид взвешенного графа, а также определенная совокупность расчетных

методов. В систему СПУ включаются также организационные и контрольные мероприятия по планированию и управлению комплексом работ.

Основными элементами сетевой модели являются *работы* и *события*. Под работой понимается процесс, требующий для своего осуществления затрат определенного времени и ресурсов (материалов, оборудования, исполнителей, финансов, энергии и т. п.). Частным видом работы является *ожидание* – процесс, входящий необходимым элементом в технологию производства, длящийся определенное время и не требующий иных затрат в виде труда или каких-либо ресурсов (например, остывание металла после плавки, просушка после покраски, старение металла, твердение бетона и т. п.).

Особым видом работ являются *фиктивные работы*. Они обозначают логическую связь между работами или группами работ и не требуют затрат ни времени, ни труда, ни материальных ресурсов, продолжительность фиктивной работы считается равной нулю. Фиктивная работа указывает на то, что какая-то работа или группа работ может начаться лишь после того, как завершится какая-то другая (предшествующая) работа или группа работ. Фиктивная работа используется тогда, когда надо отделить друг от друга разные по смысловому содержанию события (окончание и начало работ), которые могут произойти одновременно.

Под событием понимается момент, отражающий определенный этап выполнения проекта, это момент завершения отдельной работы или группы работ и возможность начать новую работу или группу работ. Событие не имеет продолжительности во времени, считается, что событие свершается мгновенно. Среди событий сетевого графика выделяют *исходное (начальное)* событие, обозначающее начало работ (начало осуществления проекта) и *завершающее (конечное)* событие, которое означает окончание всех работ рассматриваемого комплекса (завершение проекта).

События на сетевом графике изображаются кружочками (вершинами графа), а работы – стрелками (дугами ориентированного графа),

при этом фиктивные работы принято изображать пунктирными стрелками.

При построении сетевого графика необходимо соблюдать следующие правила:

1) в сетевом графике должно быть одно исходное (начальное) событие и одно завершающее (конечное) событие. В нем не должно быть других событий (кроме исходного), которым не предшествует хотя бы одна работа; в нем не должно быть также других событий (кроме завершающего), за которыми не следует непосредственно хотя бы одна работа, т. е. не должно быть так называемых «хвостов» и «тупиков»;

2) любые два события сетевого графика должны быть соединены не более чем одной работой (стрелкой); в случае необходимости вводятся фиктивные работы;

3) в сетевом графике не должно быть циклов и петель.

Исходным материалом для сетевого планирования служит список работ с указанием их взаимной последовательности, обусловленности возможного начала одних работ завершением других (опорой одних работ на другие) и продолжительностью выполнения каждой работы. В случае трехпараметрической модели приводится предположительная продолжительность работы в наиболее благоприятных условиях (оптимистический вариант), в наименее благоприятных условиях (пессимистический вариант) и наиболее вероятная продолжительность работы (среднестатистический, нормальный вариант).

Основными задачами сетевого планирования являются:

1) построение сетевого графика и расчет его временных характеристик (метод критического пути);

2) расчет вероятностных показателей для трехпараметрической или двухпараметрической сетевой модели;

3) оптимизация стоимости выполнения проекта.

Рассмотрим подробно методы решения этих задач на модельных примерах.

# ЗАДАЧИ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

## Задача 1

### Метод критического пути

Построить сетевой график, рассчитать наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, найти критический путь, определить полные и независимые резервы времени всех работ и коэффициенты напряженности некритических дуг с помощью данных, представленных в таблице.

| Работа   | Продолжительность<br>работы | Опирается на<br>работы  |
|----------|-----------------------------|-------------------------|
| $b_1$    | 5                           | —                       |
| $b_2$    | 8                           | —                       |
| $b_3$    | 3                           | —                       |
| $b_4$    | 6                           | $b_1$                   |
| $b_5$    | 4                           | $b_1$                   |
| $b_6$    | 1                           | $b_3$                   |
| $b_7$    | 2                           | $b_2, b_5, b_6$         |
| $b_8$    | 6                           | $b_2, b_5, b_6$         |
| $b_9$    | 3                           | $b_4, b_7$              |
| $b_{10}$ | 9                           | $b_3$                   |
| $b_{11}$ | 7                           | $b_2, b_5, b_6, b_{10}$ |

Или в компактной записи:

$b_1(5) \rightarrow b_4(6), b_5(4)$ ;  $b_3(3) \rightarrow b_6(1), b_{10}(9)$ ;  $b_2(8), b_5(4), b_6(1) \rightarrow b_7(2), b_8(6)$ ;  $b_4(6), b_7(2) \rightarrow b_9(3)$ ;  $b_2(8), b_5(4), b_6(1), b_{10}(9) \rightarrow b_{11}(7)$ .

*Решение*

Сначала строим структурный сетевой график и вводим правильную нумерацию событий (рис. 1):

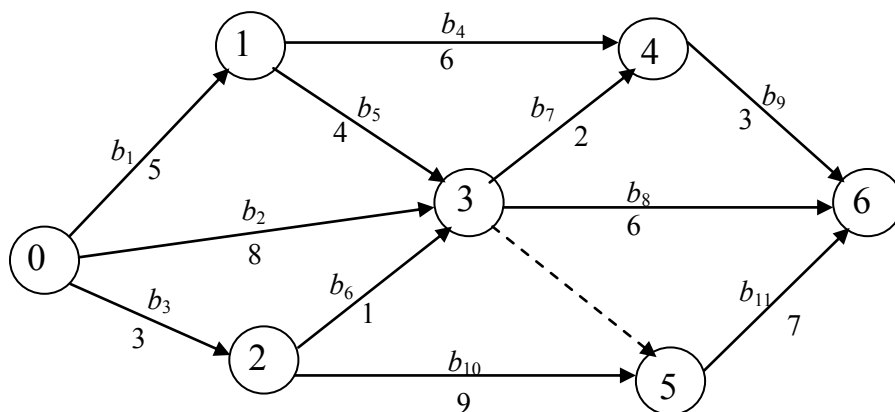


Рис. 1

Наиболее ранние сроки наступления событий находим по формуле

$$T_p(i) = \max_{j \subset i} \{T_p(j) + t_{ji}\},$$

где максимум берется по всем событиям  $j$ , непосредственно предшествующим событию  $i$ . Начальному событию присваиваем  $T_p(0) = 0$ .

Тогда:

$$T_p(1) = T_p(0) + t_{01} = 0 + 5 = 5;$$

$$T_p(2) = T_p(0) + t_{02} = 0 + 3 = 3;$$

$$T_p(3) = \max\{T_p(0) + t_{03}, T_p(1) + t_{13}, T_p(2) + t_{23}\} = \max\{5 + 4, 0 + 8, 3 + 1\} = 9;$$

$$T_p(4) = \max\{T_p(1) + t_{14}, T_p(3) + t_{34}\} = \max\{5 + 6, 9 + 2\} = 11;$$

$$T_p(5) = \max\{T_p(2) + t_{25}, T_p(3) + t_{35}\} = \max\{3 + 9, 9 + 0\} = 12;$$

$$T_p(6) = \max\{T_p(3) + t_{36}, T_p(4) + t_{46}, T_p(5) + t_{56}\} = \max\{9 + 6, 11 + 3, 12 + 7\} = 19.$$

Итак, критическое время  $T_{кр} = 19$ . Минимальный срок выполнения проекта – 19 дней.

Наиболее поздние сроки наступления событий находим по формуле

$$T_n(i) = \min_{j \supset i} \{T_n(j) - t_{ij}\},$$

где минимум берется по всем событиям  $j$ , непосредственно следующим за событием  $i$ . Конечному событию присваиваем наиболее поздний срок наступления, равный критическому времени:  $T_n(6) = T_{кр} = 19$ .

Тогда:

$$T_n(5) = T_n(6) - t_{56} = 19 - 7 = 12;$$

$$T_n(4) = T_n(6) - t_{46} = 19 - 3 = 16;$$

$$T_n(3) = \min\{T_n(6) - t_{36}, T_n(5) - t_{35}, T_n(4) - t_{34}\} = \min\{19 - 6, 12 - 0, 16 - 2\} = 12;$$

$$T_n(2) = \min\{T_n(5) - t_{25}, T_n(3) - t_{23}\} = \min\{12 - 9, 12 - 1\} = 3;$$

$$T_n(1) = \min\{T_n(4) - t_{14}, T_n(3) - t_{13}\} = \min\{16 - 6, 12 - 4\} = 8;$$

$$T_n(0) = \min\{T_n(3) - t_{03}, T_n(2) - t_{02}, T_n(1) - t_{01}\} = \min\{12 - 8, 3 - 3, 8 - 5\} = 0.$$

Результаты расчетов отразим на сетевом графике. Ранние сроки наступления событий запишем над кружками, изображающими эти события, поздние сроки наступления событий – под кружками (рис. 2).

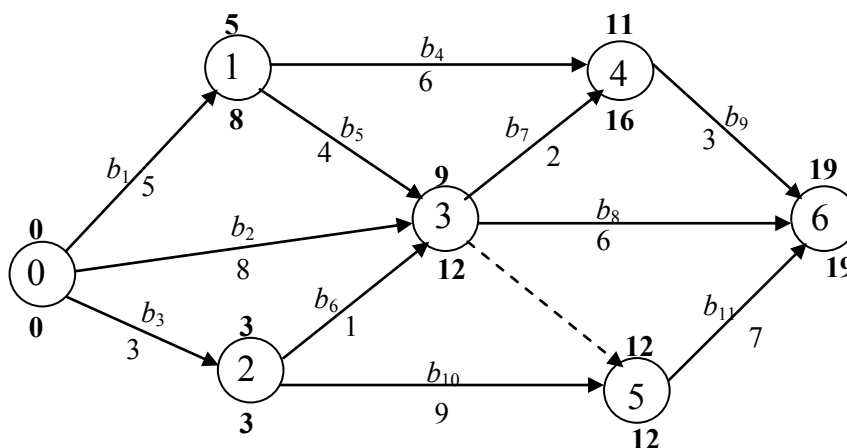


Рис. 2

Критическое время  $T_{кр} = 19$ .

Временные характеристики событий представлены в таблице:

| Событие | Ранний срок<br>$T_p(i)$ | Поздний срок<br>$T_n(i)$ | Резерв времени<br>$R(i)$ |
|---------|-------------------------|--------------------------|--------------------------|
| * 0     | 0                       | 0                        | 0                        |
| 1       | 5                       | 8                        | 3                        |
| * 2     | 3                       | 3                        | 0                        |
| 3       | 9                       | 12                       | 3                        |
| 4       | 11                      | 16                       | 5                        |
| * 5     | 12                      | 12                       | 0                        |
| * 6     | 19                      | 19                       | 0                        |

Резервы времени событий найдены по формуле  $R(i) = T_n(i) - T_p(i)$ .

Критический путь проходит через события с нулевым резервом времени, т. е. через события 0, 2, 5, 6.

Найдем резервы времени работ.

Наиболее ранний возможный срок начала работы  $b_k = (i, j)$  равен наиболее раннему сроку наступления события  $i$ :  $S_p(b_k) = T_p(i)$ , а наиболее поздний допустимый срок окончания работы  $b_k = (i, j)$  равен наиболее позднему сроку наступления события  $j$ :  $E_n(b_k) = T_n(j)$ .

Полный резерв времени работ найдем по формуле

$$r_n(b_k) = r_n(i, j) = T_n(j) - T_p(i) - t_{ij} = E_n(b_k) - S_p(b_k) - t_{ij}.$$

Независимый резерв времени работ найдем по формуле

$$r_n(b_k) = r_n(i, j) = T_p(j) - T_n(i) - t_{ij}.$$

Сведем полученные данные в таблицу:

| Работа<br>$b_k = (i, j)$ | Продолжительность работы,<br>$t(b_k) = t_{ij}$ | $S_p(b_k)$ | $E_n(b_k)$ | $r_n(b_k)$ | $r_n(b_k)$ |
|--------------------------|------------------------------------------------|------------|------------|------------|------------|
| $b_1 = (0, 1)$           | 5                                              | 0          | 8          | 3          | 0          |
| $b_2 = (0, 3)$           | 8                                              | 0          | 12         | 4          | 1          |
| * $b_3 = (0, 2)$         | 3                                              | 0          | 3          | 0          | 0          |
| $b_4 = (1, 4)$           | 6                                              | 5          | 16         | 5          | -3         |
| $b_5 = (1, 3)$           | 4                                              | 5          | 12         | 3          | -3         |
| $b_6 = (2, 3)$           | 1                                              | 3          | 12         | 8          | 5          |
| $b_7 = (3, 4)$           | 2                                              | 9          | 16         | 5          | -3         |
| $b_8 = (3, 6)$           | 6                                              | 9          | 19         | 4          | 1          |
| $b_9 = (4, 6)$           | 3                                              | 11         | 19         | 5          | 0          |
| * $b_{10} = (2, 5)$      | 9                                              | 3          | 12         | 0          | 0          |
| * $b_{11} = (5, 6)$      | 7                                              | 12         | 19         | 0          | 0          |
| $\varphi = (3, 5)$       | 0                                              | 9          | 12         | 3          | 0          |

Работа  $\varphi = (3, 5)$  – фиктивная работа.

Критические работы –  $b_3, b_{10}, b_{11}$ . Резервы времени этих работ равны нулю. Выделим критический путь двойными стрелками (рис. 3).

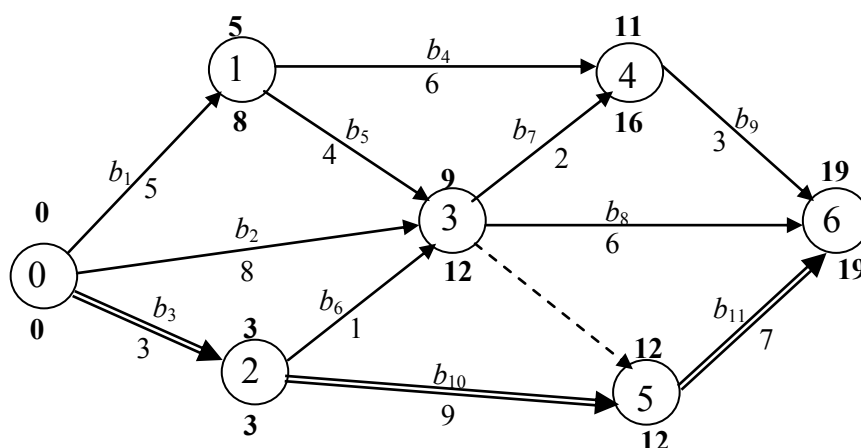


Рис. 3

Резерв времени некритической дуги  $b$  находим как разность между длиной замыкающего критического участка и длиной самой некритической дуги:

$$R(b) = a - b.$$

Коэффициент напряженности некритической дуги определим по формуле

$$N(b) = \frac{b}{a} = 1 - \frac{R(b)}{a}.$$

Резервы времени и коэффициенты напряженности некритических дуг:

| Некритические дуги | $a$ | $b$ | Резерв времени дуги, $R(b)$ | Коэффициент напряженности дуги, $N(b)$ |
|--------------------|-----|-----|-----------------------------|----------------------------------------|
| (2, 3, 5)          | 9   | 1   | 8                           | $1/9 \approx 0,11$                     |
| (0, 3, 5)          | 12  | 8   | 4                           | $2/3 \approx 0,67$                     |
| (0, 1, 3, 5)       | 12  | 9   | 3                           | $3/4 = 0,75$                           |
| (0, 3, 6)          | 19  | 14  | 5                           | $14/19 \approx 0,74$                   |
| (0, 1, 3, 6)       | 19  | 15  | 4                           | $15/19 \approx 0,79$                   |
| (0, 1, 4, 6)       | 19  | 14  | 5                           | $14/19 \approx 0,74$                   |
| (0, 1, 3, 4, 6)    | 19  | 14  | 5                           | $14/19 \approx 0,74$                   |
| (2, 3, 6)          | 16  | 7   | 9                           | $7/16 \approx 0,44$                    |
| (2, 3, 4, 6)       | 16  | 6   | 10                          | $6/16 = 0,375$                         |

Дуги, коэффициент напряженности которых  $N(b) > 0,8$ , составляют критическую зону, дуги с коэффициентом напряженности  $0,6 \leq N(b) \leq 0,8$  образуют подкритическую зону, а дуги с коэффициентом  $N(b) < 0,6$  дают резервную зону. В нашем случае в критическую зону попадает только критический путь, в подкритической зоне находятся дуги (0, 1, 3, 6), (0, 1, 3, 5), (0, 3, 6), (0, 1, 4, 6), (0, 1, 3, 4, 6) и (0, 3, 5). Из них самая напряженная дуга (0, 1, 3, 6). Она быстрее других может перейти на критический путь. Дуги (2, 3, 5), (2, 3, 6) и (2, 3, 4, 6) образуют резервную зону.